

Лекция 15

Тема. Приложения двойного интеграла.

План лекции:

- 1) Некоторые геометрические приложения двойного интеграла.
- 2) Некоторые механические приложения двойного интеграла.

§ 1. Некоторые геометрические приложения двойного интеграла.

1) Вычисление площадей.

Если область $G \subset Oxy$, то ее площадь в декартовых координатах записывается в виде

$$S(G) = \iint_G dx dy.$$

Если $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ - криволинейная трапеция, то, сведя двойной интеграл к повторному, приходим к известному выражению площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла

$$S = \iint_G dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b [y]_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

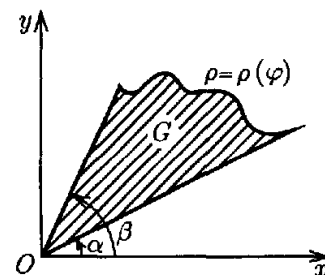
В случае замены переменных площадь G в криволинейных координатах примет вид

$$S = \iint_g \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

Величину $ds = dx dy$, представляющую собой площадь прямоугольника со сторонами dx и dy , естественно назвать *элементом площади в прямоугольных координатах x и y* , а величину $ds = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$ — *элементом площади в криволинейных координатах u и v* . Модуль якобиана $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|$ представляет собой *коэффициент растяжения площади* в точке (u, v) при отображении области g плоскости (u, v) на область G плоскости (x, y) .

Если G — криволинейный сектор на плоскости (x, y) , ограниченный лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где ρ и φ — полярные координаты то, переходя к полярным координатам, учитывая, что $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$, а $g = \{(\rho, \varphi): \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$, и сводя двойной интеграл к повторному, получаем известное выражение площади криволинейного сектора через определенный интеграл

$$S = \iint_G dx dy = \iint_g \rho d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \int_\alpha^\beta \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\rho(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi.$$



2) Вычисление площади поверхности.

а) Случай явного задания поверхности.

Площадь поверхности H , задаваемой с помощью графика непрерывно дифференцируемой в области $G \in Oxy$ функции $z = f(x, y)$ равна

$$\tilde{S}(H) = \iint_G \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} dx dy.$$

Здесь G — проекция данной поверхности H на плоскость Oxy .

б) Случай параметрического задания поверхности.

Если уравнение поверхности задано параметрически:

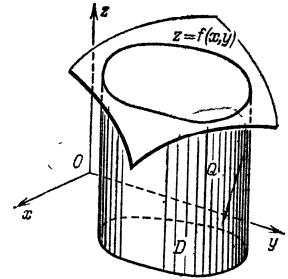
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где $(u, v) \in \Omega$, Ω — ограниченная замкнутая квадрируемая область и функции x, y и z непрерывно дифференцируемы в области Ω , то для площади поверхности имеем формулу

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

где

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$



3) Вычисление объемов тел.

Пространственное тело, ограниченное плоскостью Oxy , цилиндрической поверхностью, проходящей через границу области G с образующей параллельной оси Oz и графиком функции $z = f(x, y)$, будем называть *цилиндроидом*.

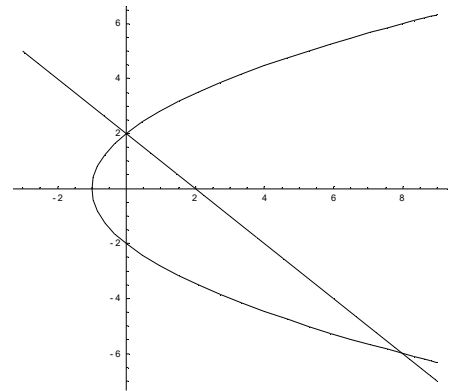
Если $f(x, y) \geq 0$ в области G , то объем соответствующего цилиндриоида равен

$$V = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy.$$

Если $f(x, y) \leq 0$ в области G , то цилиндриоид расположен ниже плоскости Oxy и $\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$ равен объему соответствующего цилиндриоида со знаком “минус”.

Если $f(x, y)$ меняет свой знак в области G , то $\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$ равен сумме объемов

частей цилиндриоида, лежащих выше плоскости Oxy взятых со знаком “плюс” и частей цилиндриоида, лежащих ниже Oxy - со знаком “минус”.



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Решение. Построим графики заданных функций:

Линии пересекаются в двух точках — $(0, 2)$ и $(8, -6)$. Таким образом, область интегрирования ограничена по

оси Ox графиками кривых от $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Oy — от -6 до 2 . Тогда искомая площадь равна:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx \, dy = \int_{-6}^2 \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4} \right) dy = \int_{-6}^2 \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4} \right) dy = \frac{1}{4} \int_{-6}^2 (-y^2 - 4y + 12) dy = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y \right) \Big|_{-6}^2 = \frac{1}{4} \left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36 \cdot 6}{3} - \frac{4 \cdot 36}{2} - 12 \cdot 6 \right) \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(88 - \frac{8}{3} \right) = 21 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

§ 2. Некоторые механические приложения двойного интеграла.

1) Вычисление масс и координат центров тяжести плоских фигур.

Пусть тело представляет собой тонкую пластину, занимающую область D на плоскости Oxy с поверхностной плотностью $\gamma(x, y)$ в точке (x, y) . Его масса равна двойному интегралу от этой плотности по области D :

$$m(D) = \iint_D \gamma(x, y) dx dy.$$

Приведем вывод данной формулы.

Требуется найти массу m плоской пластинки D , зная, что ее поверхностная плотность $\gamma = \gamma(x, y)$ есть непрерывная функция координат точки (x, y) . Разобьем пластинку D на n элементарных частей D_i ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим через ΔS_i . В каждой области D_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и вычислим плотность в ней: $\gamma(x_i; y_i)$.

Если области D_i достаточно малы, то плотность в каждой точке $(x; y) \in D_i$ мало отличается от значения $\gamma(x_i; y_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке области D_i постоянной, равной $\gamma(x_i; y_i)$, можно найти ее массу m_i : $m_i \approx \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Так как масса m всей пластинки D равна $m = \sum_{i=1}^n m_i$, то для ее вычисления имеем приближенное равенство

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i.$$

Точное значение массы получим как предел данной суммы при условии $n \rightarrow \infty, \max d_i \rightarrow 0$.

$$m = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i; y_i) \Delta S_i, \quad \text{То есть,} \quad m = \iint_D \gamma(x; y) dx dy.$$

Итак, двойной интеграл от функции $\gamma(x; y)$ численно равен массе пластинки, если подынтегральную функцию $\gamma(x; y)$ считать плотностью этой пластинки в точке $(x; y)$. В этом состоит физический смысл двойного интеграла.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_c = \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dy dx}{m(D)}; \quad y_c = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dy dx}{m(D)};$$

В случае, если $D \subset Oxy$ является однородной пластиной ($\gamma(x, y) = \text{const}$), то координаты центра тяжести записываются в виде:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{S(D)}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{S(D)}$$

2) Вычисление моментов инерции плоских фигур.

Моменты инерции однородной пластины $G \subset Oxy$ с поверхностной плотностью γ относительно координатных осей находятся по формулам:

$$\text{относительно оси } Ox: I_x = \iint_G \gamma y^2 dy dx; \quad \text{относительно оси } Oy: I_y = \iint_G \gamma x^2 dy dx;$$

относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_G (x^2 + y^2) \gamma dy dx$ - этот момент инерции называют еще полярным моментом инерции.